Exercice 103, page 149

Tout d'abord, les contraintes sur les formules sont nécessaires, car si elles ne sont pas respectées, nous ne pouvons pas généraliser, c'est-à-dire, introduire le « $\forall$ ».

1. $\forall x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \forall x P(x,y)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\forall x \forall y P(x,y)$	
1	2	$\forall y P(x,y)$	$\forall E$ 1, x
1	3	$P(x,y)$	$\forall E$ 2, y
1	4	$\forall x P(x,y)$	$\forall I$ 3
1	5	$\forall y \forall x P(x,y)$	$\forall I$ 4
	6	`Donc` $\forall x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \forall x P(x,y)$	$\Rightarrow I$ 1,5

2. $\exists x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x P(x,y)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\exists x \exists y P(x,y)$	
1,2	2	`Supposons` $\exists y P(x,y)$	
1,2,3	3	`Supposons` $P(x,y)$	
1,2,3	4	$\exists x P(x,y)$	$\exists I$ 3, x
1,2,3	5	$\exists y \exists x P(x,y)$	$\exists I$ 4, y
1,2	6	`Donc` $P(x,y) \Rightarrow \exists y \exists P(x,y)$	$\Rightarrow I$ 5,3
1,2	7	$\exists y \exists x P(x,y)$	$\exists E$ 6,2
1	8	`Donc` $\exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \exists P(x,y)$	$\Rightarrow I$ 7,2
1	9	$\exists y \exists x P(x,y)$	$\exists E$ 8,1
	10	`Donc` $\exists x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x P(x,y)$	$\Rightarrow I$ 1,9

3. $\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\exists x \forall y P(x,y)$	
1,2	2	`Supposons` $\forall y P(x,y)$	
1,2	3	$P(x,y)$	$\forall E$ 2, y
1,2	4	$\exists x P(x,y)$	$\exists I$ 3, x
1,2	5	$\forall y \exists x P(x,y)$	$\forall I$ 4
1	6	`Donc` $\forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$	$\Rightarrow I$ 5,2
1	7	$\forall y \exists x P(x,y)$	$\exists E$ 6,1
	8	`Donc` $\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$	$\Rightarrow I$ 1,7

4. $\forall x(Q(x) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow P(x,y))) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow \forall x(Q(x) \Rightarrow P(x,y)))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\forall x(Q(x) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow P(x,y)))$	
1	2	$Q(x) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow P(x,y))$	$\forall E$ 1, x
1,3	3	Supposons $R(y)$	
1,3,4	4	Supposons $Q(x)$	
1,3,4	5	$\forall y(R(y) \Rightarrow P(x,y))$	$\Rightarrow E$ 2,4
1,3,4	6	$R(y) \Rightarrow P(x,y)$	$\forall E$, y
1,3,4	7	$P(x,y)$	$\Rightarrow E$ 6,3
1,3	8	Donc $Q(x) \Rightarrow P(x,y)$	$\Rightarrow I$ 7,4
1,3	9	$\forall x(Q(x) \Rightarrow P(x,y))$	$\forall I$ 8
1	10	Donc $R(y) \Rightarrow \forall x(Q(x) \Rightarrow P(x,y))$	$\Rightarrow I$ 9,3
1	11	$\forall y(R(y) \Rightarrow \forall x(Q(x) \Rightarrow P(x,y)))$	$\forall I$ 10
	12	Donc $\forall x(Q(x) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow P(x,y))) \Rightarrow \forall y(R(y) \Rightarrow \forall x(Q(x) \Rightarrow P(x,y)))$	$\Rightarrow I$ 1,11

Exercice 104, page 150

Les démonstrations de 2 et 3 sont ERRONÉES.

1. $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$	
1	2	$\exists x\, P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x\, Q(x)$	$\wedge E2$ 1
1,4	4	Supposons $P(x)$	
1,4	5	$Q(x)$	$\forall E$ 3, x
1,4	6	$P(x) \wedge Q(x)$	$\wedge I$ 4,5
1,4	7	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\exists I$ 6, x
1	8	Donc $P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\Rightarrow I$ 4,7
1	9	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\exists E$ 2,8
	10	Donc $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\Rightarrow I$ 1,9

2. $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$	
1	2	$\exists x\, P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x\, Q(x)$	$\wedge E2$ 1
1,4	4	Supposons $P(x)$	
1,4	5	$Q(x)$	$\forall E$ 3, x
1,4	6	$P(x) \wedge Q(x)$	$\wedge I$ 4,5
1	7	Donc $P(x) \Rightarrow P(x) \wedge Q(x)$	$\Rightarrow I$ 4,6
1	8	$P(x) \wedge Q(x)$	$\exists E$ 2,7 ERREUR
1	9	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\exists I$ 8, x
	10	Donc $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\Rightarrow I$ 1,9

Il y a une erreur à la ligne 8 car x est libre dans $P(x) \wedge Q(x)$.

3. $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$	
1	2	$\exists x\, P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x\, Q(x)$	$\wedge E2$ 1
1,4	4	`Supposons` $P(x)$	
1	5	`Donc` $P(x) \Rightarrow P(x)$	$\Rightarrow I$ 4,4
1	6	$P(x)$	$\exists E$ 2,5 ERREUR
1	7	$Q(x)$	$\forall E$ 3, x
1	8	$P(x) \wedge Q(x)$	$\wedge I$ 6,7
1	9	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\exists I$ 8, x
	10	`Donc` $\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\Rightarrow I$ 1,9

Il y a une erreur à la ligne 6, car x est libre dans $P(x)$.

Exercice 105, page 150

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\forall x \forall y P(x,y)$	
1	2	$\forall y P(z,y)$	$\forall E$ 1, z
1	3	$P(z,x)$	$\forall E$ 2, x
1	4	$\forall z P(z,x)$	$\forall I$ 3
1	5	$\forall x \forall z P(z,x)$	$\forall I$ 4
1	6	$\forall x \forall y P(y,x)$	Copie 5
	7	`Donc` $\forall x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall x \forall y P(y,x)$	$\Rightarrow I$ 1,6

Exercice 106, page 150

1. $\forall x(Q \wedge P(x)) \Rightarrow Q \wedge \forall x P(x)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\forall x(Q \wedge P(x))$	
1	2	$Q \wedge P(x)$	$\forall E$ 1, x
1	3	Q	$\wedge E1$ 2
1	4	$P(x)$	$\wedge E2$ 2
1	5	$\forall x P(x)$	$\forall I$ 4
1	6	$Q \wedge \forall x P(x)$	$\wedge I$ 3,5
	7	`Donc` $\forall x(Q \wedge P(x)) \Rightarrow Q \wedge \forall x P(x)$	$\Rightarrow I$ 1,6

2. $Q \wedge \forall x P(x) \Rightarrow \forall x(Q \wedge P(x))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $Q \wedge \forall x P(x)$	
1	2	Q	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x P(x)$	$\wedge E2$ 1
1	4	$P(x)$	$\forall E$ 3, x
1	5	$Q \wedge P(x)$	$\wedge I$ 2,4
1	6	$\forall x(Q \wedge P(x))$	$\forall I$ 5
	7	`Donc` $Q \wedge \forall x P(x) \Rightarrow \forall x(Q \wedge P(x))$	$\Rightarrow I$ 1,6

3. $\forall x(Q \vee P(x)) \Rightarrow Q \vee \forall x P(x)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\forall x(Q \vee P(x))$	
1,2	2	Supposons $\neg(Q \vee \forall x P(x))$	
1,2	3	$Q \vee P(x)$	$\forall E$ 1, x
1,2,4	4	Supposons $\neg P(x)$	
1,2,4,5	5	Supposons $\neg Q$	
1,2,4,5	6	$\perp$	$\vee E$ 3,4,5
1,2,4	7	Donc $\neg\neg Q$	$\Rightarrow I$ 5,6
1,2,4	8	Q	*RAA* 7
1,2,4	9	$Q \vee \forall x P(x)$	$\vee I1$ 8
1,2,4	10	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2,9
1,2	11	Donc $\neg\neg P(x)$	$\Rightarrow I$ 4,10
1,2	12	$P(x)$	*RAA* 11
1,2	13	$\forall x P(x)$	$\forall I$ 12
1,2	14	$Q \vee \forall x P(x)$	$\vee I2$ 13
1,2	15	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2,14
1	16	Donc $\neg\neg(Q \vee \forall x P(x))$	$\Rightarrow I$ 2,15
1	17	$Q \vee \forall x P(x)$	*RAA* 16
	18	Donc $\forall x(Q \vee P(x)) \Rightarrow Q \vee \forall x P(x)$	$\Rightarrow I$ 1,17

4. $Q \vee \forall x P(x) \Rightarrow \forall x(Q \vee P(x))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $Q \vee \forall x P(x)$	
1,2	2	Supposons Q	
1,2	3	$Q \vee P(x)$	$\vee I1$ 2
1	4	Donc $Q \Rightarrow Q \vee P(x)$	$\Rightarrow I$ 2,3
1,5	5	Supposons $\forall x P(x)$	
1,5	6	$P(x)$	$\forall E$ 5, x
1,5	7	$Q \vee P(x)$	$\vee I2$ 6
1	8	Donc $\forall x P(x) \Rightarrow Q \vee P(x)$	$\Rightarrow I$ 8,5
1	9	$Q \vee P(x)$	$\vee E$ 8,1,4
1	10	$\forall x(Q \vee P(x))$	$\forall I$ 9
	11	Donc $Q \vee \forall x P(x) \Rightarrow \forall x(Q \vee P(x))$	$\Rightarrow I$ 1,10

5. $\exists x(Q \wedge P(x)) \Rightarrow Q \wedge \exists x P(x)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\exists x(Q \wedge P(x))$	
1,2	2	Supposons $Q \wedge P(x)$	
1,2	3	Q	$\wedge E1$ 2
1,2	4	$P(x)$	$\wedge E2$ 2
1,2	5	$\exists x P(x)$	$\exists I$ 4, x
1,2	6	$Q \wedge \exists x P(x)$	$\wedge I$ 3,5
1	7	Donc $Q \wedge P(x) \Rightarrow Q \wedge \exists x P(x)$	$\Rightarrow I$ 2,6
1	8	$Q \wedge \exists x P(x)$	$\exists E$ 7,1
	9	Donc $\exists x(Q \wedge P(x)) \Rightarrow Q \wedge \exists x P(x)$	$\Rightarrow I$ 1,8

6. $Q \wedge \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(Q \wedge P(x))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $Q \wedge \exists x P(x)$	
1	2	Q	$\wedge E1$ 1
1	3	$\exists x P(x)$	$\wedge E2$ 1
1,4	4	`Supposons` $P(x)$	
1,4	5	$Q \wedge P(x)$	$\wedge I$ 2,4
1,4	6	$\exists x(Q \wedge P(x))$	$\exists I$ 5, x
1	7	`Donc` $P(x) \Rightarrow \exists x(Q \wedge P(x))$	$\Rightarrow I$ 4,6
1	8	$\exists x(Q \wedge P(x))$	$\exists E$ 3,7
	9	`Donc` $Q \wedge \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(Q \wedge P(x))$	$\Rightarrow I$ 1,8

7. $\exists x(Q \vee P(x)) \Rightarrow Q \vee \exists x P(x)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\exists x(Q \vee P(x))$	
1,2	2	`Supposons` $Q \vee P(x)$	
1,2,3	3	`Supposons` Q	
1,2,3	4	$Q \vee \exists x P(x)$	$\vee I1$ 3
1,2	5	`Donc` $Q \Rightarrow Q \vee \exists x P(x)$	$\Rightarrow I$ 3,4
1,2,6	6	`Supposons` $P(x)$	
1,2,6	7	$\exists x P(x)$	$\exists I$ 6, x
1,2,6	8	$Q \vee \exists x P(x)$	$\vee I2$ 7
1,2	9	`Donc` $P(x) \Rightarrow Q \vee \exists x P(x)$	$\Rightarrow I$ 6,8
1,2	10	$Q \vee \exists x P(x)$	$\vee E$ 2,5,9
1	11	`Donc` $Q \vee P(x) \Rightarrow Q \vee \exists x P(x)$	$\Rightarrow I$ 2,10
1	12	$Q \vee \exists x P(x)$	$\exists E$ 1,11
	13	`Donc` $\exists x(Q \vee P(x)) \Rightarrow Q \vee \exists x P(x)$	$\Rightarrow I$ 1,12

8. $Q \vee \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(Q \vee P(x))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $Q \vee \exists x P(x)$	
1,2	2	`Supposons` Q	
1,2	3	$Q \vee P(x)$	$\vee I1$ 2
1,2	4	$\exists x(Q \vee P(x))$	$\exists I$ 3, x
1	5	`Donc` $Q \Rightarrow \exists x(Q \vee P(x))$	$\Rightarrow I$ 2,4
1,6	6	`Supposons` $\exists x P(x)$	
1,6,7	7	`Supposons` $P(x)$	
1,6,7	8	$Q \vee P(x)$	$\vee I2$ 7
1,6,7	9	$\exists x(Q \vee P(x))$	$\exists I$ 8, x
1,6	10	`Donc` $P(x) \Rightarrow \exists x(Q \vee P(x))$	$\Rightarrow I$ 7,9
1,6	11	$\exists x(Q \vee P(x))$	$\exists E$ 6,10
1	12	`Donc` $\exists x P(x) \Rightarrow \exists x(Q \vee P(x))$	$\Rightarrow I$ 6,11
1	13	$\exists x(Q \vee P(x))$	$\vee E$ 1,5,12
	14	`Donc` $Q \vee \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(Q \vee P(x))$	$\Rightarrow I$ 1,13

Exercice 107, page 150

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\neg\exists xA$	
1,2	2	Supposons A	
1,2	3	$\exists xA$	$\exists I$ 2, x
1,2	4	$\bot$	$\Rightarrow E$ 1,3
1	5	Donc $\neg A$	$\Rightarrow I$ 2,4
1	6	$\forall x\neg A$	$\forall I$ 5
	7	Donc $\neg\exists xA \Rightarrow \forall x\neg A$	$\Rightarrow I$ 1,6

Remarquez que dans cette preuve nous utilisons le fait que x est libre pour lui-même.

Exercice 108, page 150

1. $R(a,c)\wedge(a=b)\Rightarrow R(b,c)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $R(a,c)\wedge(a=b)$	
1	2	$R(a,c)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$a=b$	$\wedge E2$ 1
1	4	$R(\underline{b},c)$	Congruence 2,3
	5	Donc $R(a,c)\wedge(a=b)\Rightarrow R(b,c)$	$\Rightarrow I$ 1,4

2. Preuve de $x=y\Rightarrow f(x,z)=f(y,z)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $x=y$	
1	2	$f(x,z)=f(x,z)$	Réflexivité
1	3	$f(x,z)=f(\underline{y},z)$	Congruence 1,2
L'égalité 1 permet de remplacer dans 2 l'occurrence qui est soulignée en 3			
	4	Donc $x=y\Rightarrow f(x,z)=f(y,z)$	$\Rightarrow I$ 1,3

3. Preuve de $\forall x\exists y(x=y)$.

contexte	numéro	preuve	règle
	1	$x=x$	Réflexivité
	2	$\exists y(x=y)$	$\exists I$ 1, x
	3	$\forall x\exists y(x=y)$	$\forall I$ 2

Pour la deuxième ligne, remarquez que $x=x\equiv(x=y)<y:=x>$.

4. $\exists x\forall y\; x=y\Rightarrow\forall x\forall y\; x=y$

contexte	numéro	ligne	règle
1	1	Supposons $\exists x\forall y\; x=y$	
1,2	2	Supposons $\forall y\; x=y$	
1,2	3	$x=u$	$\forall E$ 2, u
1,2	4	$x=y$	$\forall E$ 2, y
1,2	5	$\underline{u}=y$	Congruence 3,4
1,2	6	$\forall y\; u=y$	$\forall I$ 5
1,2	7	$\forall u\forall y\; u=y$	$\forall I$ 6
1,2	8	$\forall x\forall y\; x=y$	Copie 7
1	9	Donc $\forall y\; x=y\Rightarrow\forall x\forall y\; x=y$	$\Rightarrow I$ 2,8
1	10	$\forall x\forall y\; x=y$	$\exists E$ 1,9
	11	Donc $\exists x\forall y\; x=y\Rightarrow\forall x\forall y\; x=y$	$\Rightarrow I$ 1,11

Exercice 109, page 150

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\exists x P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$	
1	2	$\exists x P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$	$\wedge E2$ 1
1,4	4	`Supposons` $P(x)$	
1,4,5	5	`Supposons` $P(y)$	
1,4,5	6	$P(x) \wedge P(y)$	$\wedge I$ 4,5
1,4,5	7	$\forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$	$\forall E$ 3, x
1,4,5	8	$P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y$	$\forall E$ 7, y
1,4,5	9	$x = y$	$\Rightarrow E$ 6,8
1,4	10	`Donc` $P(y) \Rightarrow x = y$	$\Rightarrow I$ 5,9
1,4	11	$\forall y (P(y) \Rightarrow x = y)$	$\forall I$ 10
1,4	12	$P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y)$	$\wedge I$ 4,11
1,4	13	$\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y))$	$\exists I$ 12, x
1	14	`Donc` $P(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y))$	$\Rightarrow I$ 4,13
1	15	$\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y))$	$\exists E$ 2,14
	16	`Donc` $\exists x P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y))$	$\Rightarrow I$ 1,15

Exercice 110, page 151

1. Des hypothèses (a) et (b), nous ne pouvons pas déduire $\forall n(0 + n = n)$. Considérons l'interprétation de domaine $\{0,1\}$ avec :
   — le sens de s défini par : $s(0) = 0, s(1) = 1$.
   — le sens de $+$ défini par : $0+0 = 0, 0+1 = 0, 1+0 = 1, 1+1 = 0$.
   Dans ce domaine la propriété (a) vaut : $(0+0 = 0).(1+0 = 1) = 1$. La propriété (b) est aussi vraie, car $n+s(p) = n+p = s(n+p)$, vu que s est l'identité sur le domaine. Par contre (c) vaut 0, car l'addition n'est pas commutative dans l'interprétation. Donc (c) n'est pas conséquence de (a) et (b).
2. Commençons par une preuve « informelle » de cette propriété. D'après (a) il est évident que $0+0 = 0$ donc que $P(0)$. Supposons $P(n)$ et prouvons $P(s(n))$: $P(n)$ s'écrit $n+0 = n$. D'après (b) nous avons $0+s(n) = s(n+0)$. Par suite $0+s(n) = s(n)$, c'est-à-dire $P(s(n))$.

   La preuve formelle reprend ce plan de preuve, mais elle est beaucoup plus longue, car elle explicite la définition de P et ne saute aucune étape de la récurrence. Dans tous les exercices, où la preuve, en déduction naturelle, peut être longue, nous conseillons d'écrire une preuve « informelle » avant de la transcrire en déduction naturelle.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $(a) \wedge (b) \wedge (c) \wedge (d)$	
1	2	$\forall n(n+0 = n)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$(b) \wedge (c) \wedge (d)$	$\wedge E2$ 1
1	4	$\forall n \forall p(n+s(p) = s(n+p))$	$\wedge E1$ 3
1	5	$(c) \wedge (d)$	$\wedge E2$ 3
1	6	$\forall n(P(n) \Leftrightarrow 0+n = n)$	$\wedge E1$ 5
1	7	$P(0) \wedge \forall n(P(n) \Rightarrow P(s(n))) \Rightarrow \forall n P(n)$	$\wedge E2$ 5

Nous prouvons $P(0)$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	8	$0+0 = 0$	$\forall E$ 2, 0
1	9	$P(0) \Leftrightarrow 0+0 = 0$	$\forall E$ 6, 0
1	10	$0+0 = 0 \Rightarrow P(0)$	$\wedge E2$ 9
1	11	$P(0)$	$\Rightarrow E$ 10,8

Nous prouvons $\forall n(P(n) \Rightarrow P(s(n))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1,12	12	`Supposons` $P(n)$	
1,12	13	$P(n) \Leftrightarrow 0+n=n$	$\forall E$ 6, n
1,12	14	$P(n) \Rightarrow 0+n=n$	$\wedge E1$ 13
1,12	15	$0+n=n$	$\Rightarrow E$ 14,12
1,12	16	$\forall p(0+s(p)=s(0+p))$	$\forall E$ 4, 0
1,12	17	$0+s(n)=s(0+n)$	$\forall E$ 16, n
1,12	18	$0+s(n)=s(\underline{n})$	Congruence 15,17
1,12	19	$P(s(n)) \Leftrightarrow 0+s(n)=s(n)$	$\forall E$ 6, $s(n)$
1,12	20	$0+s(n)=s(n) \Rightarrow P(s(n))$	$\wedge E2$ 19
1,12	21	$P(s(n))$	$\Rightarrow E$ 20,18
1	22	`Donc` $P(n) \Rightarrow P(s(n))$	$\Rightarrow I$ 12,21
1	23	$\forall n(P(n) \Rightarrow P(s(n))))$	$\forall I$ 22

Nous appliquons le principe de récurrence.

contexte	numéro	preuve	règle
1	24	$P(0) \wedge \forall n(P(n) \Rightarrow P(s(n)))$	$\wedge I$ 11,23
1	25	$\forall n P(n)$	$\Rightarrow E$ 7,24
	26	`Donc` $(a) \wedge (b) \wedge (c) \wedge (d) \Rightarrow \forall n P(n)$	$\Rightarrow I$ 1,24

Exercice 111, page 151

1. Preuve de $(\exists x\ p(x) \Rightarrow \forall x\ q(x)) \Rightarrow \forall x(p(x) \Rightarrow q(x))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\exists x\ p(x) \Rightarrow \forall x\ q(x)$	
1,2	2	`Supposons` $p(x)$	
1,2	3	$\exists x\ p(x)$	$\exists I$ 2
1,2	4	$\forall x\ q(x)$	$\Rightarrow E$ 1,3
1,2	5	$q(x)$	$\forall E$ 4, x
1	6	`Donc` $p(x) \Rightarrow q(x)$	$\Rightarrow I$ 2,5
1	7	$\forall x(p(x) \Rightarrow q(x))$	$\forall I$ 6
	8	`Donc` $(\exists x\ p(x) \Rightarrow \forall x\ q(x)) \Rightarrow \forall x(p(x) \Rightarrow q(x))$	$\Rightarrow I$ 1,7

2. Preuve de $\exists x\ p(x) \wedge \forall x(p(x) \Rightarrow p(f(x))) \Rightarrow \exists x\ p(f(f(x)))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\exists x\ p(x) \wedge \forall x(p(x) \Rightarrow p(f(x)))$	
1	2	$\exists x\ p(x)$	$\wedge E1$ 1
1,3	3	`Supposons` $p(x)$	
1,3	4	$\forall x(p(x) \Rightarrow p(f(x)))$	$\wedge E2$ 1
1,3	5	$p(x) \Rightarrow p(f(x))$	$\forall E$ 4, x
1,3	6	$p(f(x))$	$\Rightarrow E$ 3,5
1,3	7	$p(f(x)) \Rightarrow p(f(f(x)))$	$\forall E$ 4, $f(x)$
1,3	8	$p(f(f(x))$	$\Rightarrow E$ 6,7
1,3	9	$\exists x\ p(f(f(x))$	$\exists I$, x
1	10	`Donc` $p(x) \Rightarrow \exists x\ p(f(f(x))$	$\Rightarrow I$ 3,9
1	11	$\exists x\ p(f(f(x))$	$\exists E$ 2,10
	12	`Donc` $\exists x\ p(x) \wedge \forall x(p(x) \Rightarrow p(f(x))) \Rightarrow \exists x\ p(f(f(x)))$	$\Rightarrow I$ 1,12

3. Prouvons que pour tout entier naturel n, $\exists x\ p(x), \forall x(p(x) \Rightarrow p(f(x))) \vdash \exists x\ p(f^n(x))$.

   (a) Preuve en déduction naturelle de :
   (*) $\forall x(p(x) \Rightarrow p(f(x))) \vdash \exists x\ p(f^n(x)) \Rightarrow \exists x\ p(f^{n+1}(x))$

environnement			
référence		formule	
i		$\forall x(p(x) \Rightarrow p(f(x)))$	
contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\exists x\ p(f^n(x))$	
1,2	2	`Supposons` $p(f^n(x))$	
1,2	3	$p(f^n(x)) \Rightarrow p(f^{n+1}(x))$	$\forall E\ i,\ f^n(x)$
1,2	4	$p(f^{n+1}(x))$	$\Rightarrow E$ 2,3
1,2	5	$\exists x p(f^{n+1}(x))$	$\exists I$ 4, x
1	6	`Donc` $p(f^n(x)) \Rightarrow \exists x p(f^{n+1}(x))$	$\Rightarrow I$ 2,5
1	7	$\exists x p(f^{n+1}(x))$	$\exists E$ 1,6
	8	`Donc` $\exists x\ p(f^n(x)) \Rightarrow \exists x\ p(f^{n+1}(x))$	$\Rightarrow I$ 1,7

   (b) Notons $P(n)$ la propriété :
   $\exists x\ p(x), \forall x(p(x) \Rightarrow p(f(x))) \vdash \exists x\ p(f^n(x))$
   Montrons qu'elle est vraie pour tout entier naturel n.

   La propriété $P(0)$ est vraie car la conclusion $\exists x\ p(x)$ fait partie des hypothèses
   Supposons $P(n)$ vraie. D'après (*) et par monotonie de $\vdash$, on a :
   (**) $\exists x p(x), \forall x(p(x) \Rightarrow p(f(x))) \vdash \exists x\ p(f^n(x)) \Rightarrow \exists x\ p(f^{n+1}(x))$
   D'après $P(n)$,(**) et la composition, $P(n+1)$ est aussi vraie.
   Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 112, page 151

1. $\neg\forall x P(x) \vee \neg\exists y Q(y) \Rightarrow \neg(\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y))$.

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	`Supposons` $\neg\forall x P(x) \vee \neg\exists y Q(y)$	
1,2	2	`Supposons` $\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y)$	
1,2,3	3	`Supposons` $\neg\forall x P(x)$	
1,2,3	4	$\forall x P(x)$	$\wedge E1$ 2
1,2,3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 3,4
1,2	6	`Donc` $\neg\forall x P(x) \Rightarrow \perp$	$\Rightarrow I$ 3,5
1,2,7	7	`Supposons` $\neg\exists y Q(y)$	
1,2,7	8	$\exists y Q(y)$	$\wedge E2$ 2
1,2,7	9	$\perp$	$\Rightarrow E$ 3,4
1,2	10	`Donc` $\neg\exists y Q(y) \Rightarrow \perp$	$\Rightarrow I$ 3,5
1,2	11	$\perp$	$\vee E$ 1,6,10
1	12	`Donc` $\neg(\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y))$	$\Rightarrow I$ 2,11
	13	`Donc` $\neg\forall x P(x) \vee \neg\exists y Q(y) \Rightarrow \neg(\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y))$	$\Rightarrow I$ 1,12

2. $\forall x \forall y(P(y) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow \exists y P(y) \Rightarrow \forall x R(x)$.