Exam INF432

Stéphane Devismes Benjamin Wack

May 2019
2 pages
Total : 120 points + 5 bonus
Duration : 2h00

Documents allowed: a recto-verso A4 sheet of manuscript notes.
The scale is *indicative*, points corresponding to the expected number of minutes needed to solve the exercise.
The total number of points for the examination is 120, the 5 additional points will be counted as a bonus.
The result of a question may be admitted and used in following questions. Exercices can be treated in the order of your choice provided that they are clearly numbered.

Exercice 1 (First-order formula and Expansions (25 points))**.**
For each of the following formulas:

- $A = \forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$
- $B = \exists x (F(x) \Rightarrow G(x)) \Rightarrow (\forall x F(x) \Rightarrow \forall x G(x))$
- $C = \forall x \forall y (P(x,y) \Rightarrow x = y) \Rightarrow \exists x P(x,x)$

1. *Give the corresponding signature.*
2. *Determine a countermodel of the formula using expansions.*

Réponse:

- 1. Signature : $\{R^{r2}\}$
  2. Contre-modèle par expansion :
     $D = \{0\}$: $R(0,0) \Rightarrow R(0,0)$ valide
     $D = \{0,1\}$: $(R(0,0) \Rightarrow R(0,0)).(R(0,1) \Rightarrow R(1,0)).(R(1,0) \Rightarrow R(0,1)).(R(1,1) \Rightarrow R(1,1))$
     Tout R_I contenant un seul des couples $(0,1)$ et $(1,0)$ convient.
- 1. Signature : $\{F^{r1}, G^{r1}\}$
  2. Contre-modèle par expansion :
     $D = \{0\}$: $(F(0) \Rightarrow G(0)) \Rightarrow (F(0) \Rightarrow G(0))$ valide
     $D = \{0,1\}$:$(F(0) \Rightarrow G(0)) + (F(1) \Rightarrow G(1)) \Rightarrow F(0).F(1) \Rightarrow G(0).G(1)$
     $F_I = \{0,1\}$ et G_I contenant un et un seul élément du domaine.
- 1. Signature : $\{P^{r2}, =^{r2}\}$
  2. Contre-modèle par expansion :
     $D = \{0\}$: $(P(0,0) \Rightarrow 0 = 0) \Rightarrow P(0,0)$
     $P_I = \{\}$.

□

Exercice 2 (Formalization (25 points))**.**
The great city of King's Landing *is host to an important social movement called the "blue shields". King* Joffrey Baratheon *organizes a national conference in order to bring back the situation to normal.* Tyrion Lannister*, Hand of the king, voices a few opinions about that movement :*

1. *"Jon and Arya are both blue shields, but they don't want the same leader. Moreover, neither of them wants Robb as a leader."*
2. *"Several blue shields (at least two) want to be a leader."*
3. *"Every blue shield shares the same ideas as the one they want for leader, except if that one participates to the national conference."*
4. *"Jon is the only blue shield who will participate to the national conference."*
5. *"Whichever blue shield you consider, there is always another one who does not share the same ideas."*

Using the following signature, formalize the statements of Tyrion Lannister.

- Arya*,* Jon *and* Robb *are three constants.*
- Blue(x) *means that x is a blue shield.*
- *The function* Favorite(x) *returns the leader x wishes for.*
- *The relation* Share(x,y) *formalizes the fact that x shares the same ideas as y.*
- *The relation* Participate(x) *formalizes the fact that x will participate to the national conference.*

Réponse:

1. Jon et Arya sont des boucliers bleus, ils ne veulent pas du même chef. De plus ni l'un ni l'autre ne veut de Robb comme chef.

$$Bleu(Jon) \wedge Bleu(Arya) \wedge \neg(Favori(Jon) = Favori(Arya)) \wedge \neg(Favori(Jon) = Robb) \wedge \neg(Favori(Arya) = Robb)$$

2. Plusieurs boucliers bleus (au moins deux) veulent être chef.

$$\exists x \exists y (Bleu(x) \wedge Bleu(y) \wedge \neg(x = y) \wedge Favori(x) = x \wedge Favori(y) = y)$$

3. Tous les boucliers bleus adhèrent aux mêmes idées que celui qu'ils veulent comme chef, sauf si celui-ci participe aux états généraux.

$$\forall x (Bleu(x) \Rightarrow Adhere(x, Favori(x)) \vee Participe(Favori(x)))$$

(Un "ou exclusif" serait mieux approprié mais on ne l'exigera pas.)

4. Jon est le seul bouclier bleu qui participera aux états généraux.

$$\forall x (Bleu(x) \wedge Participe(x) \Leftrightarrow x = Jon)$$

5. Quelque soit le bouclier bleu, on en trouve toujours un autre qui n'adhère pas aux mêmes idées que lui.

$$\forall x (Bleu(x) \Rightarrow \exists y (Bleu(y) \wedge \neg Adhere(y, x)))$$

(On peut aussi mentionner $x \neq y$ à droite de l'implication mais il ne sera pas exigé.)

□

Exercice 3 (Unification (15 points))**.**
For each of the following equations, determine whether it has a solution, and if it does determine a most general unifier. To this end, use the algorithm from your course notes, and list each step of the computation labeled with the rule used.

1. $\neg f(a, x, g(y, b)) = \neg f(a, z, g(b, z))$

2. $f(r(z), z, b) = f(x, g(y, a), y)$

3. $f(x, z, y) = f(y, r(x), g(a, r(z)))$

Réponse:

1. $\neg f(a, x, g(y, b)) = \neg f(a, z, g(b, z))$

   Décomposition : $f(a, x, g(y, b)) = f(a, z, g(b, z))$
   Décomposition : $a = a,\ x = z,\ g(y, b) = g(b, z)$
   Identité : $x = z,\ g(y, b) = g(b, z)$
   Décomposition : $x = z,\ y = b,\ b = z$
   Élimination de y **:** $x = z,\ y := b,\ b = z$
   Orientation : $x = z,\ y := b,\ z = b$
   Élimination de z **:** $x = b,\ y := b,\ z := b$
   Élimination de x **:** $x := b,\ y := b,\ z := b$

   $< x := b, y := b, z := b >$ est une solution la plus générale de l'équation.

2. $f(r(z), z, b) = f(x, g(y, a), y)$

   Décomposition : $r(z) = x,\ z = g(y, a),\ b = y$
   Orientation : $x = r(z),\ z = g(y, a),\ b = y$
   Orientation : $x = r(z),\ z = g(y, a),\ y = b$
   Élimination de y **:** $x = r(z),\ z = g(b, a),\ y := b$
   Élimination de z **:** $x = r(g(b, a)),\ z := g(b, a),\ y := b$
   Élimination de x **:** $x := r(g(b, a)),\ z := g(b, a),\ y := b$

   $< x := r(g(b, a)), z := g(b, a), y := b >$ est une solution la plus générale de l'équation.

3. $f(x, z, y) = f(y, r(x), g(a, r(z)))$

   Décomposition : $x = y,\ z = r(x),\ y = g(a, r(z))$
   Élimination de z **:** $x = y,\ z := r(x),\ y = g(a, r(r(x)))$
   Élimination de y **:** $x = g(a, r(r(x))),\ z := r(x),\ y := g(a, r(r(x)))$
   Élimination de x **:** échec.

$\square$

Exercice 4 (Skolemization (10 points))**.**
Consider the reasoning in which the assumptions are:
$H_1 = \forall x \exists y (P(x) \Rightarrow R(x, y))$
$H_2 = \forall x \exists y (P(y) \vee R(x, y))$
and the conclusion is :
$C = \exists x \exists y\ R(x, y)$
Prove that this reasoning is correct using Herbrand's method, following the steps:

1. *Skolemize and put in clausal form the assumptions and the negation of the conclusion.*

2. *Give contradictory instances of these clauses.*

Réponse:

1. Forme normale :

$$\begin{array}{rcl} H_1 & = & \forall x \exists y (\overline{P(x)} + R(x, y)) \\ H_2 & = & \forall x \exists y (P(y) + R(x, y)) \\ \neg C & = & \forall x \forall y\ \overline{R(x, y)} \end{array}$$

2. Forme propre :

$$\begin{array}{rcl} H_1 & = & \forall x \exists y(\overline{P(x)} + R(x,y)) \\ H_2 & = & \forall z \exists t(P(t) + R(z,t)) \\ \neg C & = & \forall u \forall v \ \overline{R(u,v)} \end{array}$$

3. Elimination des $\exists$:

$$\begin{array}{rcl} H_1 & : & \forall x(\overline{P(x)} + R(x,f(x))) \\ H_2 & : & \forall z(P(g(z)) + R(z,g(z))) \\ \neg C & : & \forall u \forall v \ \overline{R(u,v)} \end{array}$$

4. Enlèvement des $\forall$ et forme clausale :

$$\overline{P(x)} + R(x,f(x)), \quad P(g(z)) + R(z,g(z)), \quad \overline{R(u,v)}$$

5. Instances contradictoires :

$$\overline{P(g(a))} + R(g(a),f(g(a))), \quad P(g(a)) + R(a,g(a)), \quad \overline{R(g(a),f(g(a)))}, \quad \overline{R(a,g(a))}$$

□

Exercice 5 (Resolution (15 points))**.**
Consider the following set of first-order clauses:

$$\Gamma = \{P(z) \lor Q(b,a) \lor \neg R(x), P(f(a)) \lor \neg Q(x,y), \neg P(x) \lor \neg P(f(y)), Q(f(a),a) \lor R(z)\}$$

We want to prove that this set of clauses is unsatisfiable using instantiation and resolution.

1. *Find contradictory instances of these clauses and prove by propositional resolution that these instances are contradictory.*
2. *Give a direct proof that Γ is contradictory using factorization, copy and binary resolution. You may end up using only part of the rules.*

Réponse:

Instanciation : Nous obtenons les instances contradictoires suivantes :

$$P(f(a)) \lor Q(b,a) \lor \neg R(a), P(f(a)) \lor \neg Q(b,a), P(f(a)) \lor \neg Q(f(a),a), \neg P(f(a)), Q(f(a),a) \lor R(a)$$

Par résolution propositionnelle nous avons la preuve :

1:	$P(f(a)) \lor \neg Q(b,a)$	Hypothèse
2:	$\neg P(f(a))$	Hypothèse
3:	$\neg Q(b,a)$	Révolvant 1,2
4:	$P(f(a)) \lor Q(b,a) \lor \neg R(a)$	Hypothèse
5:	$P(f(a)) \lor \neg R(a)$	Résolvant 3,4
6:	$\neg R(a)$	Résolvant 2,5
7:	$P(f(a)) \lor \neg Q(f(a),a)$	Hypothèse
8:	$\neg Q(f(a),a)$	Résolvant 2,7
9:	$Q(f(a),a) \lor R(a)$	Hypothèse
10:	$R(a)$	Résolvant 8,9
11:	$\perp$	Résolvant 6,10

Résolution binaire :

1:	$P(f(a)) \vee \neg Q(x,y)$	Hypothèse	
2:	$\neg P(x) \vee \neg P(f(y))$	Hypothèse	
3:	$\neg P(f(y))$	Factorisation	$< x := f(y) >$
4:	$P(f(a)) \vee \neg Q(x_0,y_0)$	Copie de 1	$< x := x_0, y := y_0 >$
5:	$\neg Q(x_0,y_0)$	Résolvant binaire 3,4	$< y := a >$
6:	$P(z) \vee Q(b,a) \vee \neg R(x)$	Hypothèse	
7:	$P(z) \vee \neg R(x)$	Résolvant binaire 5,6	$< x_0 := b, y_0 := a >$
8:	$\neg R(x)$	Résolvant binaire 3,7	$< z := f(y) >$
9:	$Q(f(a),a) \vee R(z)$	Hypothèse	
10:	$R(z)$	Résolvant binaire 5,9	$< x_0 := f(a), y_0 := a >$
11:	$\perp$	Résolvant binaire 8,10	$< x := z >$

□

Exercice 6 (Natural deduction (20 points))**.**
Prove the following formulae using first-order natural deduction. As in the lectures and exercises, you will number the formulae and indicate for each line: its context, the corresponding rule and the numbers of its premises.

1. $\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$
2. $\forall x(f(x) = x) \Rightarrow \forall x \forall y(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

Réponse:

1. $\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x))$	
1	2	$\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x))$	$\wedge$E1 1
1	3	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\wedge$E2 1
1,4	4	Supposons $P(x) \wedge Q(x)$	
1,4	5	$P(x)$	$\wedge$E1 4
1,4	6	$Q(x)$	$\wedge$E2 4
1,4	7	$Q(x) \Rightarrow R(x)$	$\forall$E x, 2
1,4	8	$R(x)$	$\Rightarrow$E 6, 7
1,4	9	$P(x) \wedge R(x)$	$\wedge$I 5, 8
1,4	10	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	$\exists$I x, 9
1	11	Donc $(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$	$\Rightarrow$I 4, 10
1	12	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	$\exists$E 3, 11
	13	Donc $\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$	$\Rightarrow$I 1, 12

2. $\forall x(f(x) = x) \Rightarrow \forall x \forall y(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

contexte	numéro	preuve	règle
1	1	Supposons $\forall x(f(x) = x)$	
1,2	2	Supposons $f(x) = f(y)$	
1,2	3	$f(x) = x$	$\forall E$ 1,x
1,2	4	$f(y) = y$	$\forall E$ 1,y
1,2	5	$x = f(y)$	*cong* 3,2
1,2	6	$x = y$	*cong* 4,5
1	7	Donc $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$	$\Rightarrow I$ 2,7
1	8	$\forall y(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$	$\forall I$ 7
1	9	$\forall x \forall y(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$	$\forall I$ 8
	10	Donc $\forall x(f(x) = x) \Rightarrow \forall x \forall y(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$	$\Rightarrow I$ 1,9

□

Exercice 7 (Proof by natural induction (15 points, exercise from the handout))**.**
Prove that if a ***propositional*** *formula contains only one variable x and the operations $\vee$ and $\wedge$ (no negation), then it is equivalent to a formula of size* 0.
Réponse: Nous effectuons une preuve par récurrence sur la taille des formules. Considérons une formule F construite avec une seule variable x, uniquement $\vee$ et $\wedge$ et sans négation.

Cas de base : $|F| = 0$. La récurrence est trivialement vérifiée dans ce cas.

Induction : $|F| = n+1$ et supposons que toutes les formules construite avec une seule variable x, uniquement $\vee$ et $\wedge$ et sans négation de taille inférieure ou égale à n sont équivalentes à une formule de taille 0. Nous avons deux cas duaux, où $|A| \leq n$ et $|B| \leq n$, donc par hypothèse de récurrence A et B sont donc équivalentes à une formule de taille 0, c'est-à-dire 0, 1, ou x :

- $F = (A \vee B)$. Nous avons donc 9 cas à examiner :
  - $A = 0$
    - $B = 0$, donc $F = 0$.
    - $B = 1$, donc $F = 1$.
    - $B = x$, donc $F = x$.
  - $A = 1$
    - $B = 0$, donc $F = 1$.
    - $B = 1$, donc $F = 1$.
    - $B = x$, donc $F = 1$.
  - $A = x$
    - $B = 0$, donc $F = x$.
    - $B = 1$, donc $F = 1$.
    - $B = x$, donc $F = x$.
- $F = (A \wedge B)$. Nous avons donc 9 cas à examiner :
  - $A = 0$
    - $B = 0$, donc $F = 0$.
    - $B = 1$, donc $F = 0$.
    - $B = x$, donc $F = 0$.
  - $A = 1$
    - $B = 0$, donc $F = 0$.
    - $B = 1$, donc $F = 1$.
    - $B = x$, donc $F = x$.
  - $A = x$
    - $B = 0$, donc $F = 0$.
    - $B = 1$, donc $F = x$.
    - $B = x$, donc $F = x$.

$\square$